Завдання

1. Знайти суму цифр добутку $\underbrace{33\ldots3}_{10\text{ цифр}} \cdot \underbrace{66\ldots6}_{20\text{ цифр}}$.

2. На дошці 1 вересня 2008 р. були записані числа: 124 і 200. Кожного дня старший науковий співробітник витирає ці числа і пише замість них їхнє середнє арифметичне і середнє гармонійне. Знайдіть добуток чисел, що буле записано на дошці (під вечір) 31 грудня того ж року. (Нагадаємо: $\frac{a+b}{2}$ – середнє арифметичне; $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ – середнє гармонійне чисел a і b).

3. Розв'язати рівняння відносно x: $|x+2| = ax$.

4. Як за допомогою тільки лінійки з двома позначками (двома рисками) побудувати перпендикуляр до заданої прямої.

Зауваження використовувати лінійку для проведення дуги (замість циркуля) та використовувати паралельність або перпендикулярність її боків не можна.

5. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Коло, яке проходить через точки A, O, B дотикаються до прямої BC. Доведіть, що коло, яке проходить через точки B, O, C дотикається до прямої CD.

6. На прямій розміщено дві фішки: ліворуч – червона, праворуч – синя. Дозволяється операції лише двох типів: ставити на пряму в довільному місці дві фішки одного кольору, але так щоб вони стояли поруч; знімати дві сусідні фішки одного кольору. Чи можна за якусь скінчену кількість операцій

залишити на прямій рівно дві фішки: червону – праворуч, синю – ліворуч?

7. Через фіксовану точку M всередині кола проводять дві взаємо перпендикулярні хорди AC і BD. Нехай K і Z – середини хорд AB і CD відповідно. Довести, що значення виразу $AB^2 + CD^2 - 2 \cdot KZ^2$ не залежить від хорд AC і BD.

8. Знайти найменше натуральне число, яке не менше ніж двома різними способами представляється у вигляді ($9m+97n$, де m та n – деякі натуральні числа).

9. Розв'язати рівняння: $(x^3-9x^2-x+9)^2+(x^3+3x^2-x-3)^4=0$.

10. Спростити вираз:

$$A = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\ .$$

11. Розв'язати рівняння: $(x^2+3x-2)^2+3(x^2+3x-2)-2=x$.

12. Точка D – середина сторони AC ΔABC. DE і DF – бісектриси ΔABD і ΔCBD. Відрізки BD і EF перетинаються в точці M. Доведіть, що $DM = \frac{1}{2}EF$.

13. Скількома різними способами число $\frac{1}{3}$ можна подати у вигляді суми трьох різних дробів з чисельником рівним 1? (Порядок доданків вважається неістотним).

14. При яких цілих значеннях a обидва корені рівняння $x^2+ax-6=0$ є цілими числами.

15. Дід Дмитро їхав машиною зі швидкістю 60 км/год до вокзалу зустрічати сина. У певний момент він зрозумів, що

спізнюється і встигне доїхати своєчасно якщо на кожному кілометрові шляху, що залишився зуміє зекономити по 70 сек. Чи встигне дід Дмитро приїхати до прибуття поїзду? Відповідь обґрунтуйте.

16. Якою цифрою закінчується число 2007^{2007}?

17. *У* ΔABC $\angle A=90°$, BD і CE – бісектриси трикутника, а відрізки DK і EM – перпендикуляри до BC. Знайдіть градусну міру кута KAM.

18. У заданому ΔABC провести пряму, що перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно, так що $AM=MN=NB$. У якому випадку $MN \parallel AC$?

19. Відомо, що X_1 і X_2– дійсні корені рівняння $(3a-1)x^2+(3a-1)x+a^2=0$. Для яких значень параметра а виконується рівність $X_1^3 + X_2^3 = -1$.

20. Знайти найбільшу відстань між двома точками площини, координати яких задовольняють рівність $|2005 - x| + |2005 - y| = 2005$.

21. Діаметр кола поділеного на 4 однакові частини. На колі взяли довільну точку M. Довести, що сума квадратів відстаней від точки M до точок поділу (разом з кінцями діаметра) не залежить від вибору цієї точки. Обчислити суму, якщо радіус кола дорівнює a.

22. Якщо a, b, c – довжини сторін трикутника, то $a^3+b^3 3abc>c^3$. Доведіть.

23. Знайти розв’язки в цілих числах рівняння $x^3-x=y^2-19y+98$.

24. Порівняти числа: $\frac{7^{2008}+1}{7^{2009}+1}$ та $\frac{7^{2009}+1}{7^{2010}+1}$.

25. Дано число 25762. Яку цифру і на якому місці потрібно дописати до нього, щоб отримати число, яке ділиться на 36.

26. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^3 - 8y^2 + 16y - 8 = 0 \\ z^3 - 8x^2 + 16x - 8 = 0 \\ y^3 - 8z^2 + 16z - 8 = 0 \end{cases}$.

27. Через кінці A і B діаметра кола провели дві прямі, що перетинають коло в точках K і M, що лежать по одну сторону від прямої AB. Знайти радіус кола, якщо $\angle KAB=60°$ і точка перетину прямих AK і BM знаходиться на відстані 1 від точок K і M.

28. Скласти квадратний тричлен з цілими коефіцієнтами такі, щоб один з його коренів був $1-\sqrt{2009}$.

29. Побудувати графік функції
$f(x) = x^2 + 2008x - (\sqrt{2008x + 2009})^2$.

30. Миколка написав на дошці декілька цілих чисел, Оля записала під кожним Миколиним числом його квадрат, а Льоня додав всі написані на дошці числа і отримав 2009. Доведіть, що або Оля, або Льоня зробили помилку.

31. Середину більшої бічної сторони прямокутної трапеції з'єднали з вершинами трапеції. При цьому трапеція розділилася на три рівнобедрених трикутники. Знайдіть величину гострого кута.

32. Населення острова складається із лицарів – що говорять завжди правду, та брехунів – що завжди брешуть. Трьом мешканцям цього острова, які йшли разом, зустрівся турист, який кожного запитав: «Скільки лицарів серед ваших

супутників?». Перший відповів: «Один». Другий сказав: «Жодного». Що сказав третій супутник?

33. Знайти многочлен з цілими коефіцієнтами коренями якого є число $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}$.

34. Знайти всі натуральні n щоб число n^4-3n^2+9 було простим.

35. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $4x^3+7x^2y+2xy^2-y^3=12$.

36. Нехай a, b, c – довжини сторін трикутника, а S – його площа. Відомо, що $S=\frac{1}{4}(c^2-a^2-a^2)$. Доведіть, що $\angle C=135°$.

37. Нехай a, b, c – додатні числа. $a+b+c=1$. Довести, що $(1+a)(1+b)(1+c)\geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$.

38. Коло ділить кожну сторону рівностороннього трикутника на три рівні частини. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки цього кола до вершин трикутника є сталою величиною.

39. Розв'язати рівняння $x^6-7x^2+\sqrt{6}=0$.

40. Відомо, що $a^2=bc$, $b^2=ac$, $c^2=ab$. Довести, що $a=b=c$.

41. Розкласти на множники $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+$ $+2(x^2+1)$.

42. Обчислити: $\sqrt{2007\cdot 2008\cdot 2009\cdot 2010+1}$.

43. Розв'язати рівняння:
$1+a+a^2t+\ldots+a^x=(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^{32})$.

44. В трикутнику дві медіани взаємно перпендикулярні і дорівнюють 18 см і 24 см. Знайти площу трикутника.

45. Розв'язати в цілих числах рівняння: $x+y=x^2-xy+y^2$.

46. Розв'язати рівняння: $x^3 - 3x + 3\frac{1}{3} = 0$.

47. Розв'язати рівняння: $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 16$.

48. Доведіть, що всі корені рівняння $x^2-4x-2=0$ є також коренями рівняння $(x^2-3x-2)^2-3(x^2-3x-2)=0$.

49. На двох сторонах ΔABC побудовані квадрати $ABMK$ і $BCTP$, які лежать зовні цього трикутника. Точка O – середина сторони AC. Доведіть, що $\angle BPM=\angle CBO$.

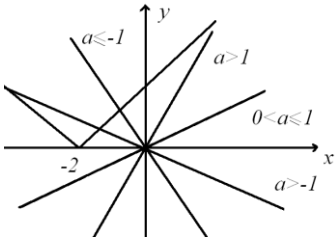
50. Доведіть рівність: $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

Відповіді, вказівки, розв'язання

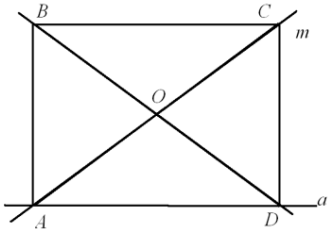
1. $\underbrace{33\ldots3}_{10\text{ цифр}} \cdot \underbrace{66\ldots6}_{20\text{ цифр}} = 3 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{10\text{ цифр}} \cdot 3 \cdot \underbrace{22\ldots2}_{20\text{ цифр}} = \underbrace{99\ldots9}_{10\text{ цифр}} \cdot \underbrace{22\ldots2}_{20\text{ цифр}} =$
$= (10^{10} - 1) \cdot \underbrace{22\ldots2}_{20\text{ цифр}} = \underbrace{22\ldots2}_{20\text{ цифр}} \cdot \underbrace{00\ldots0}_{10\text{ цифр}} - \underbrace{22\ldots2}_{20\text{ цифр}} =$
$= \underbrace{22\ldots2}_{9\text{ цифр}}1\underbrace{99\ldots9}_{10\text{ цифр}}\underbrace{77\ldots7}_{9\text{ цифр}}8$. Тоді сума цифр одержаного числа:
$2 \cdot 9 + 1 + 9 \cdot 10 + 7 \cdot 9 + 8 = 180.$

2. Оскільки $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab$, то 124·200=24800.

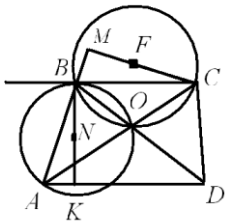
3. Вказівка: Використати геометричний метод.
   1. $a \le -1$, то $x = \frac{2}{a-1}$;
   2. $-1 < a < 0$, то $x = \frac{2}{a-1}$,
      $x = -\frac{2}{a+1}$;
   3. a=0, то x=-2;
   4. 0<a≤1, то $x \in \emptyset$;
   5. $a > 1$, то $x = \frac{2}{a-1}$.



4. Вказівка: Якщо через точку A прямої a провести пряму m і на ній відкласти $AO=OC$ (довжина між рисками). Від точки O відкладемо $OD=OB \Rightarrow BA \perp a$ як сторона прямокутника $ABCD$ ($AC=BD$ діагоналі).

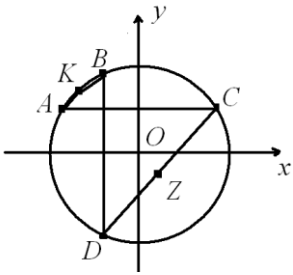


5. Вказівка: Оскільки BC дотична до кола, що проходить через точки A, B, C, то $BN \perp BC$, центр кола $N \in BK$ висоті. Звідси центр кола $F \in MC$ – висоті (внаслідок симетричності) і $FC \perp CD$, тобто CD – дотична до кола описаного навколо ΔBOC.



6. Ні, не можна, оскільки після кожної операції непарність фішок залишається. Зняти можна лише парну кількість фішок, що не дає змоги змінити порядок розташування.

7. Вказівка: Введемо декартову систему, як показано на малюнку $C(x_1;y_1)$ $A(-x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$ $D(-x_2;-y_2)$, тоді $K\left(\frac{x_1-x_1}{2};\frac{y_2+y_1}{2}\right)$, $Z(\frac{x_2+x_1}{2};\frac{y_1-y_2}{2})$. Звідси отримаємо, що $AB^2+CD^2-2\cdot KZ^2=0$ не залежить від хорд AC і BD.



8. Нехай дане число $N=19m_1+97n_1=19m_2+97n_2$ – представлено двома способами. Звідси $19(m_1-m_2)=97(n_2-n_1)$ тоді $m_1-m_2=97k$, $n_2-n_1=19k$. Отже $m_1=98$, $m_2=1$, $n_2=20$, $n_1=1$. Отримаємо число 19·98+97·1=19·10+97·20=1959.

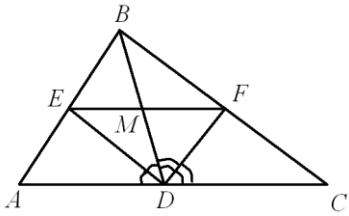
9. Вказівка: $\begin{cases}x^3-9x^2-x+9=0;\\x^3+3x^2-x-3=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2(x-9)-(x-9)=0;\\x^2(x+3)-(x+3)=0;\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-1)(x-9)=0;\\(x^2-1)(x+3)=0;\end{cases}\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm1.$
Відповідь: ±1.

10. $A=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\right.$

2−2+2+3=2+3·2+2+3· 4−2−2+3=2+3·2+2+3· 2−2+3=2+3·4−2−3=2+3·2−3=4−3=1=1.

11. Нехай $x^2+3x-2=y$, тоді $y^2+3y-2=x$. Віднімаючи ці рівності, отримаємо $x^2-y^2+3(x-y)=y-x$, або $(x-y)(x+y)+4(x-y)=0$; $(x-y)(x+y+4)=0$; $x=y$ або $x=-y-4$ і т.д.

12. Оскільки $\angle ADC=180°$, то $\angle EDF=90°$. DE і FB бісектриси, тому $\frac{AE}{BE}=\frac{AD}{BD}$ і $\frac{CF}{FB}=\frac{DC}{BD}$ => $\frac{AE}{BE}=\frac{CF}{BF}$, тому $EF \| AC$, тому $EM=MF=MD$, точка M – центр описаного кола ΔEFD. Звідси $DM=\frac{1}{2}EF$, що й треба було довести.



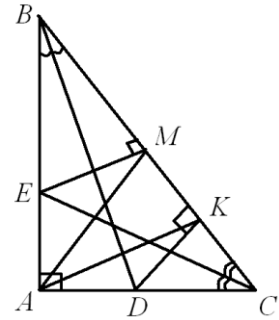
13. $\frac{1}{3}=\frac{6}{18}=\frac{1+2+3}{18}=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}=\frac{8}{24}=\frac{1+3+4}{24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}$;
$\frac{1}{3}=\frac{10}{30}=\frac{1+3+6}{30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}=\frac{12}{36}=\frac{1+2+9}{36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{4}$;
$\frac{1}{3}=\frac{14}{42}=\frac{1+6+7}{42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}=\frac{15}{45}=\frac{1+6+7}{42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}$;
$\frac{1}{3}=\frac{16}{48}=\frac{1+3+12}{48}=\frac{1}{48}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}=\frac{20}{60}=\frac{1+4+15}{60}=\frac{1}{60}+\frac{1}{15}+\frac{1}{4}$ …
Відповідь: безліч.

14. За теоремою Вієта $x_1x_2=-6$, тому x_1 та x_2 можуть дорівнювати: (-6; 1), (6; -1), (-3; 2), (3; -2), звідси $a=-(x_1+x_2)$, тому $a=\pm 5$; ± 1.

15. Вказівка: Ні, оскільки за 1 хв=60 с проїжджає 1 км, то на кожному кілометрі не зможе зекономити 70 с=1 хв 10 с.

16. Вказівка: 2007^1 закінчується на 7, 2007^2 закінчується на 9, 2007^3 – 3, 2007^4 – 1, 2007^5 – 7. $2007^{2007}=2007^{4\cdot 501+3}$ закінчується на 3.

17. Вказівка: Нехай $\angle ACE=\angle CEM=\alpha$; $\angle ABD=\angle DBC=\beta$, тоді $\angle AEC=90^\circ-\alpha$ і $\angle EMM=\alpha$ $(AE=EM)$. Аналогічно з ΔABD: $\angle BDA=90^\circ-\beta$ і $\angle KAD=\angle AKD=\beta$. Звідси $\angle MKK=90^\circ-(\angle BAM+\angle KAD)=90^\circ-(\alpha+\beta)=90^\circ-45^\circ=45^\circ(2\alpha+2\beta=90^\circ)$.



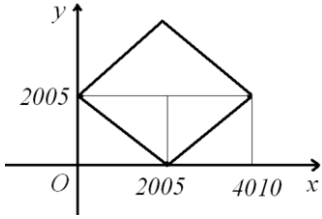
18. Вказівка: ΔAMN і ΔMNB рівнобедрені, тоді кути NAM і MNA рівні і дорівнюють половині кута NBA, тобто $B/2$. Тому ділимо кут B навпіл і від AB відкладаємо кут BAK рівний $B/2$. Точку перетину AK з CB позначаємо як N. Від NM відкладаємо кут ANP рівний $B/2$. Точку перетину NP з AB позначаємо як M. MN – шукана пряма.

19. За теоремою Вієта маємо $x_1+x_2=-1$; $x_1\cdot x_2=\frac{a^2}{3a-1}$. ОДЗ: $D=(3a-1)^2-4(3a-1)\cdot a^2=(3a-1)(3a-1-4a^2)>0, a<\frac{1}{3}$. Тоді $x_1^3+x_2^3=-1$; $(x_1+x_2)\cdot((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=-1$; $-1\cdot\left((-1)^2-3\cdot\frac{a^2}{3a-1}\right)=-1$. $1-\frac{3a^2}{3a-1}=1$; $a=0$.

Відповідь: $a=0$.

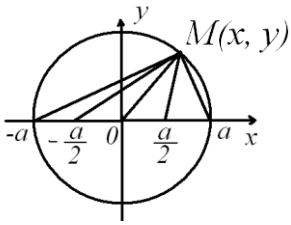
20. Вказівка: Найбільша відстань між двома точками фігури дорівнює 4010.

Відповідь: 4010.



21. Вказівка: розв'яжемо задачу координатним методом.

$$(x+a)^2+(y+a)^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+$$
$$+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+x^2+y^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+$$
$$+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+(x-a)^2+(y-a)^2=$$



$= x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2ay + a^2 + x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2 +$
$+ay + \frac{a^2}{4} + x^2 + y^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - ay + \frac{a^2}{4} +$
$+x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2ya + a^2 = 5(x^2 + y^2) + 4a^2 +$
$+4\frac{a^2}{4} = 5a^2 + 4a^2 + a^2 = 10a^2$, що й треба було довести.
Відповідь: $10a^2$.

22. За нерівністю трикутника $a+b>c$, тоді $c^3 < (a+b)^3 =$
$= a^3 + 3ab(a+b) + b^3 < a^3 + 3abc + b^3$, що й треба було довести.

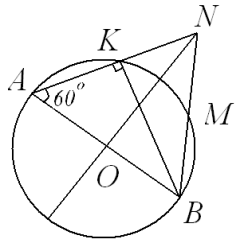
23. 1 спосіб. Оскільки $x^3-x=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)$ ділиться на 6, а $y^2-19y+98$ не ділиться, то розв'язків в цілих числах не існує.
2 спосіб. Запишемо рівняння у вигляді $y^2-19y+98-x^3+x=0$. Тоді $y_{12} = \frac{19\pm\sqrt{361-4\cdot(98-x^3+x)}}{2} = \frac{19\pm\sqrt{4x^3-4x-32}}{2} = \frac{19\pm2\sqrt{x^3-x-8}}{2}$ не є цілим числом.

24. Вказівка: Нехай $7^{2008}=t$, тоді $\frac{t+1}{7t+1} - \frac{7t+1}{49t+1} =$
$= \frac{49t^2+50t+1-49t^2-14t-1}{(7t+1)(49t+1)} = \frac{36t}{(7t+1)(49t+1)} > 0.$

25. Відповідь: 257652.

26. Вказівка: Внаслідок симетричності системи рівнянь кожне рівняння запишемо у вигляді: $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = (y-1)^2$. Звідси $x=y=z=2$.
Відповідь: (2; 2; 2).

27. Вказівка: Оскільки $KN=NM=1$, то K і M симетричні відносно NO, тобто ΔANB – рівносторонній $\angle AKB=90°$,



$\angle ABK=30^\circ$ тоді $AK=\frac{1}{2}AB=R$. Маємо: $R+1=2R$, $R=1$.
Відповідь: 1.

28. 1 спосіб. $x=1-\sqrt{2009}$, $1-x=\sqrt{2009}$, $(1-x)^2=2009$, $1-2x+x^2=2009$, x^2-2x-2008=0.
2 спосіб. $x_1=1-\sqrt{2009}$, $x_2=1+\sqrt{2009}$, тоді $b=-(x_1+x_2)=-2$ $c=x_1\cdot x_2=-2008$. Отже $x^2-2x-2008=0$.

29. Вказівка: $D(y)=\left[-\frac{2009}{2008};\ +\infty\right)$, тоді $f(x)=x^2+2008-$ $-2008x-2009-x^2-2009$.

30. Вказівка: Кожну суму $(n+n^2)$ можна подати у вигляді $n(n+1)$ – парне число. Отже, сума всіх чисел не може бути 2009.

31. Відповідь: 60°.

32. Нехай $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{9}$, тоді
$\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)x=\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{9}\right)$,
$\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)x=1$. Звідси
$\left(3-2-3\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)\sqrt[3]{6}\right)x^3=1$;
$\left(1-\frac{3}{x}\sqrt[3]{6}\right)x^3=1$; $3\cdot\sqrt[3]{6}x^2=x^3-1$; $27\cdot 6\cdot x^6=(x^3-1)^3$;
$x^9-165x^6+3x^3-1=0$.

33. Відповідь: Жодного.

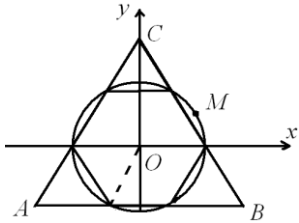
34. $n^4+6n^2+9-9n^2=(n^2+3)^2-(3n)^2=$
$=(n^2+3n+3)\cdot(n^2-3n+3)$. Звідси $n^2-3n+3=1$; $n^2-3n+2=0$; n=1 або n=2.

35. Відповідь: (1; 1). Вказівка: $(x^2+2xy+y^2)(4x-y)=12$; $(x+y)^2(4x-y)=12$. Цілі розв'язки $x+y=1$ і $4x-y=12$, або $x+y=2$ і $4x-y=3$ і т.д.

36. Вказівка: $S=\frac{1}{4}\cdot(c^2-a^2-b^2)=\frac{1}{4}\cdot(a^2+b^2-$
$-2ab\cos\gamma-a^2-b^2)=\frac{1}{4}(-2ab\sin\gamma)=-\frac{1}{2}ab\cos\gamma$ і
$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Звідси -cos$\gamma$=sin$\gamma$. *tg*$\gamma$*=-1. γ=135°.*

37. Вказівка: Нехай $a\le b\le c$, тоді $\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}\cdot\frac{1+c}{1-c}=$
$=\frac{1-a+2a}{1-a}\cdot\frac{1-b+2b}{1-b}\cdot\frac{1-c-2c}{1-c}=\left(1+\frac{2a}{1-a}\right)\left(1+\frac{2b}{1-b}\right)\left(1+\frac{2c}{1-c}\right)\ge$
$\ge\left(1+\frac{2c}{1-c}\right)^3\ge 8=2^3$. Звідси $1+\frac{2c}{1-c}\ge 2$, $\frac{2c}{1-c}\ge 1$, $c\ge\frac{1}{3}$.

38. Аналогічно до задачі 21, введемо систему координат. Нехай *AB=3a,* тоді $A\left(-1{,}5a;\ -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $B\left(1{,}5a;\ -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $C\left(0;\ -a\sqrt{3}\right)$. $x^2+y^2=a^2$ – рівняння кола, тоді *M(x; y)* – довільна точка кола



$MA^2+MB^2+MC^2=(x+1.5a)^2+\left(y+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+$
$+(x-1.5a)^2+\left(y+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+x^2+\left(y-a\sqrt{3}\right)^2$ і т.д.

39. $x^6-6x^2-x^2+\sqrt{6}=0$. Нехай $\sqrt{6}=y$, тоді
$+x^6-x^2=0,\ x^2y^2-y-x^6+x^2=0,$
$D=1-4x^2(-x^6+x^2)=1-4x^4+4x^8=(1-2x^4)^2,$ тоді
$y=\frac{1\pm(1-2x^4)}{2x^4}$; $y_1=x^2, x^2=\sqrt{6}, x=\sqrt[4]{6}$ або $y_2=\frac{2-2x^4}{x^2}$.
Розв'яжемо $\frac{2-2x^4}{x^2}=\sqrt{6}$, або $2-2x^4-\sqrt{6}x^2=0$
$2x^4+\sqrt{6}x^2-2=0,$ *D*=6+16=22, $x^2=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{22}}{4}$. Звідси
$x^2=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{22}}{4}; x\in\emptyset$, або $x^2=\frac{\sqrt{22}-\sqrt{6}}{4}; x=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{22}-\sqrt{6}}}{2}$.

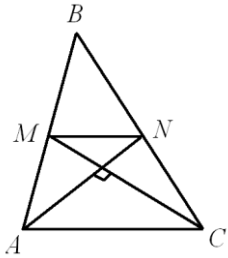
40. Поділимо першу рівність на другу: $\frac{a^2}{b^2}=\frac{b}{a}$, $a^3=b^3$, $a=b$. Аналогічно і т.д.

41. Вказівка: $a=x^2+bx+1$; $b=x^2+1$, тоді $2a^2+5ab+2b^2=$
$=2(a+2b)\left(a+\frac{b}{2}\right)=(a+2b)(2a+b)$.

42. Вказівка: 2010=a. $\sqrt{(a-3)(a-2)(a-1)a+1}=$
$=\sqrt{(a^2-3a)(a^2-3a+2)+1}=$
$=\sqrt{(a^2-3a)^2+2(a^2-3a)+1}=a^2-3a+1$.

43. Вказівка: $(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^{32})=$
$=\frac{(1-a)(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^{32})}{(1-a)}=\frac{1-a^{64}}{1-a}=$
$=\frac{(1-a)(1+a+\dots+a^{63})}{1-a}=1+a+\dots+a^{63}$.
Відповідь: x=63.

44. Вказівка:



$S_{AMNC}=\frac{1}{2}AN\cdot CM=\frac{1}{2}\cdot 18\cdot 24=9\cdot 24=$
$=216$ (см^2). $S_{\Delta ABC}:S_{\Delta MBN}=(1:2)^2$.
$S_{\Delta ABC}=\frac{5}{4}\cdot S_{AMNC}=\frac{5}{4}\cdot 216=270$ (см^2).

45. Вказівка: $2x+2y=2x^2-2xy+2y^2$, $(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2$.
Відповідь: (0; 0), (1; 0), (0; 1), (2; 1), (1; 2), (2; 2).

46. Вказівка: $a^3+b^3+c^3-3ab=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-\right.$
$\left.-ab+ac+bc\right)$, $x3+3331333-3x=0$, звідси

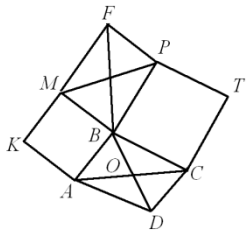
$x+\sqrt[3]{3}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=0$, $x=-\sqrt[3]{3}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

47. Вказівка: $x^2-\frac{6x^2}{x+3}+\frac{9x^2}{(x+3)^2}+\frac{6x^2}{x+3}-16=0$;
$\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2+6\frac{x^2}{x+3}-16=0$;
$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+6\frac{x^2}{x+3}-16=0$. Нехай $\frac{x^2}{x+3}=y, y^2+6y-16=0$,

$y=-8$ або $y=2$.

48. Вказівка: $x^2-3x-2=x$.

49. Вказівка: Добудуємо ΔMBP і ΔABC паралелограми $MBPF$ і $ABCD$. Вони рівні. Звідси кути рівні.



50. Вказівка: 1 спосіб. $\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}+$

$+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4.$

2 спосіб. $\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3=20+14\sqrt{2}+$

$+20-14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\left(20-14\sqrt{2}\right)}\cdot 4=40+$

$+12\sqrt[3]{400-392}=40+12\sqrt[3]{8}=64$

3 спосіб. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$, тоді

$20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)}\sqrt[3]{\left(20-14\sqrt{2}\right)}x=$

$=x^3, x^3-6x-40=0$. Очевидно $x=4$.

Література

1. И.Л. Бобинская. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.
2. В.О. Борисов, В.М. Лейфура та ін. Змагання юних математиків України. – Х.: Основа, 2005.
3. А.Б. Волковська, О.В. Гримайло. Готуємось до олімпіади з математики. – Х.: Основа, 2007.
4. Р.П. Ушаков. Знаходження скінчених сум. – Х.: Основа, 2006.
5. В.А. Ясинський. Задачи математических олимпиад. – Терн.: Навчальна книга, 2005.

Зміст

Завдання.....3

Відповіді, вказівки, розв’язання.....9

Література.....18