ЗАВДАННЯ

1. Одне число більше другого на 50%. На скільки відсотків друге число менше першого?

2. Число p – просте і $p>3$. Доведіть, що число $p^2–1$ ділиться на 24.

3. Дід Дмитро їхав машиною зі швидкістю 60 км/год до вокзалу зустрічати сина. У певний момент він зрозумів, що спізнюється і встигне доїхати своєчасно, якщо на кожному кілометру шляху, що залишився, зуміє зекономити по 70 секунд. Чи встигне дід Дмитро приїхати до прибуття поїзда? Відповідь обґрунтуйте.

4. У трикутнику ABC кут A прямий, BD і CE – бісектриси трикутника, а відрізки DK і EM – перпендикуляри до BC. Знайдіть градусну міру кута KAM.

5. Розв’язати рівняння: $x^2-2x+y^2-4y+5=0.$

6. Всередині трикутника розташовані дві точки. Відстань від однієї з них до сторін трикутника 2, 6 і 18 см, а від другої (у тому порядку) – 4, 6 і 12 см. Знайти радіус кола, вписаного в даний трикутник.

7. Три групи рибалок впіймали 113 рибин. Кожному рибалці першої групи дісталося по 13 рибин, другої групи – по 5 рибин, а третьої групи – по 4 рибини. Скільки рибалок було в кожній групі, якщо всього їх було 16?

8. Довести, що якщо $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$, то

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

9. Довести, що вираз n^3+3n^2-n-3 ділиться на 48 при будь-якому непарному n.

10. У трикутнику ABC зі сторонами $BC=a, AC=b, AB=c$ медіани, проведені до сторін BC і AC перпендикулярні. Довести, що $a^2+b^2=5c^2$.

11. Знайти суму 2008 цифр після коми у дробі $\frac{3}{7}$.

12. Обчислити суму $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{959}+\sqrt{961}}$.

13. У натурального числа n є такі два різних дільників a і b, що $(a-1)(b+2)=n-2$. Довести, що $2n$ – квадрат натурального числа.

14. Побудуйте графік функції $y=\frac{5x^2-|x|}{x+|x|}$.

15. Знайти усі такі натуральні числа n, для яких число n^4-22n^2-46 ділиться без остачі на $n+5$.

16. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{37}{21}x\right)^3=p$, де p – середнє арифметичне чисел $A=\frac{158^2+158\cdot 185+185^2}{158+185}$ і $B=\frac{158^2-158\cdot 185+185^2}{185-158}$.

17. Знайти усі такі натуральні числа B, для яких з трьох наступних тверджень два є правильними, а одне – хибне:
    1) B+41 є квадратом натурального числа;
    2) B-21 ділиться без остачі на 10;

3) В-48 є квадратом натурального числа.

18. За допомогою циркуля і лінійки поділіть кут 35° на 7 рівних частин.

19. Знайдіть усі пари цілих невід'ємних чисел m і n, які задовольняють рівність $mn-m-n=2004$.

20. Цілі числа a, b, c, d задовольняють рівність $a^2-b^2=c^2-d^2=2008$. Довести, що число $m=2(a+b)(c+d)(ac+bd-2008)$ є квадратом цілого числа.

21. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок $M(x; y)$ координати яких задовольняють рівність $|y| = \frac{|x| \cdot x - |x|}{x}$.

22. Порівняти два числа 79^{26} і 244^{21}.

23. Легко перевірити, що набір (1; 3; 5; 7) є розв'язком рівняння $x^2+y^2+z^2+t+21=xyzt$. Чи існує така четвірка натуральних чисел (a, b, c, d), яка також є його розв'язком і при цьому справджується нерівність $abcd>2008$.

24. Знайдіть усі такі пари дійсних чисел x і y, для яких справджується нерівність $y^2 + y + \sqrt{y - x^2 - xy} \le 3xy$.

25. Автомобіль рухався із швидкістю 50 км/год, а назад повертався – 30 км/год. Яка середня швидкість автомобіля?

26. Довести, що для будь-яких дійсних чисел a і b виконується нерівність $\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \ge \frac{a^3b + ab^3}{2}$.

27. Доведіть, що $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}$ – натуральне число.

28. У містечку $\frac{2}{3}$ усіх чоловіків жонаті і $\frac{3}{5}$ усіх жінок заміжні. Яка доля населення містечка одружені?

29. Кооператив отримує яблучні та виноградні соки в однакових бідонах і випускає яблучно-виноградний сік у однакових банках. Одного бідона яблучного соку вистачить рівно на 6 банок суміші соків, а одного бідона виноградного соку – рівно на 10. Коли рецептуру змінили, одного бідона яблучного соку стало вистачати рівно на 5 банок суміші. На скільки банок суміші тепер вистачить одного бідону виноградного соку?

30. У класі кожний хлопчик товаришує з двома дівчатами, а кожна дівчинка – рівно з трьома хлопцями. Ще відомо, що в класі 31 дитина займається спортом і 19 парт. Скільки дівчат і скільки хлопців у класі?

31. Побудуйте рівнобедрений трикутник за двома нерівними висотами.

32. Чотири стрибунця сидять у вершинах квадрата. Кожну хвилину один з них стрибає в точку, симетричну йому відносно іншого стрибунця. Доведіть, що стрибунці не можуть у якийсь момент опинитися у вершинах більшого квадрата.

33. Розв’яжіть у цілих числах рівняння $xy=x+y$.

34. Свіжі фрукти містять 72% води, а сушені – 20%. Скільки сушених фруктів одержимо з 20 кг свіжих?

35. На площині 10 точок. Скільки існує відрізків, що сполучають ці точки?

36. Усі цілі числа, починаючи з 1 виписані підряд. Яка цифра стоїть на 2008 місці?

37. Розв'язати рівняння: $\left|\left|\left||x|-4\right|-3\right|-2\right|=1$.

38. Спростити вираз: $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+4}$.

39. Знайти значення виразу: $\dfrac{2a-b}{3a-b}+\dfrac{5b-a}{3a+b}$, якщо $10a^2-3b^2+5ab=0$.

40. Довести, що $\sqrt{\underbrace{11...1}_{2n}-\underbrace{22...2}_{n}}=\underbrace{33...3}_{n}$.

41. У квадрат, сторона якого дорівнює 1 м, кинули 53 точки. Довести, що якісь три з них можна покрити квадратом із стороною 20 см.

42. Довести, що для будь-яких чисел *a, b, c* завжди виконується нерівність $a^2+b^2+c^2+3>2(a+b+c)$.

43. Відомо, що x і y додатні числа, причому $x+y=2005$. Знайдіть найбільше значення добутку xy. Для яких x і y цей добуток максимальний?

44. Чи існує многогранник, у якого 2007 граней – трикутники, а решта граней – чотирикутники і шестикутники.

45. Розв’яжіть рівняння: $x^2-xy-2y^2=7$ у цілих числах.

46. Визначити дві останні цифри числа 2^{2008}.

47. Доведіть, що число $2006\cdot 2007\cdot 2008\cdot 2009+1$ є точним квадратом.

48. Доведіть, що число n^4+4 є складеним.

49. Розкласти на множники x^8+x^7+1, x^8+x+1.

50. Довести, що многочлен $x^{95}+x^{94}+x^{93}+\ldots+x^2+x+1$ ділиться на многочлен $x^{31}+x^{30}+\ldots+x^2+x+1$.

ВІДПОВІДІ, ВКАЗІВКИ, РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. $a=\frac{3}{2}b$, то $b=\frac{2}{3}a=a-\frac{1}{3}a$. Відповідь: $33\frac{1}{3}$%.
2. Очевидно, *(p-1)p(p+1)* ділиться на 3, але *p* – просте число і *p*>3, не ділиться на 3, то *(p-1)(p+1)* ділиться на 3. Крім цього, *p* – непарне значить *p-1* і *p+1* – парні, тому одне із них ділиться на 2, друге – на 4, тобто *(p-1)(p+1)* ділиться на 8.
3. Ні. $60\frac{км}{год}=\frac{60км}{60хв}=1\frac{км}{хв}$. Тому на 1 км, який проїжджає за 60 с, не можна зекономити 70 с.
4. 45°. За властивістю бісектриси кута *AE=EM, AD=DK*. Тоді трикутники *AEM* і *ADK* – рівнобедрені, а зовнішні кути при їхніх вершинах дорівнюють *C* і *A* відповідно. Звідси кут *EAM* дорівнює *C/2*, а кут *KAD – A/2*.
5. (1;2) $x^2-2x+1+y^2-4y+4=0$, $(x-1)^2+(y-2)^2=0$, $x=1$, $y=2$.
6. 6 см. За теоремою Фалеса отримаємо: (2; 6; 18) → (4; 6; 12) → (6; 6; 6).
7. (5, 4, 7). Вказівка $\begin{cases}13x+5y+4z=113\\4x+4y+4z=64\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}9x+y=49\\x+y+z=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=4.\\z=7\end{cases}$$

8. $\frac{a^2}{b+c}+\frac{ba}{c+a}+\frac{ca}{a+b}=a$; $\frac{ba}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{cb}{a+b}=b$;

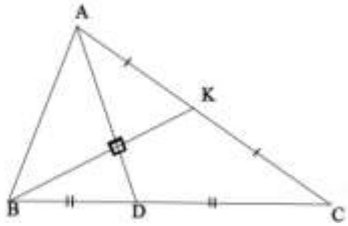
$\frac{ca}{b+c}+\frac{cb}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=c.$ Почленно додамо:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{b(a+c)}{a+c}+\frac{a(b+c)}{b+c}+\frac{c(a+b)}{a+b}=$$

$$a+b+c \Rightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}+a+b+c=a+b+c \Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

9. $n^3+3n^2-n-3 = n^2(n+3)-(n+3) = (n^2-1)(n+3) = (n-1)(n+1)(n+3)$. $n = 2k+1$, то $2k(2k+2)(2k+4) = 2\cdot k\cdot 2(k+1)\cdot 2(k+2) = =8\cdot k\cdot (k+1)\cdot (k+2)$ ділиться на 48, бо добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 6.

10. 

$AD\perp BK,\ AK=\dfrac{b}{2},$ $BD=\dfrac{a}{2},\ AD=m_a$, $BK=m_b$ Відповідно з ΔOAK, ΔBOA і ΔBOD отримаємо: $\left(\frac{1}{3}m_b\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2$,

$\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2=c^2$ і $\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2+\left(\frac{1}{3}m_a\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$, звідси

$$\frac{1}{9}m_b^2+\frac{4}{9}m_a^2=\frac{b^2}{4};\quad \frac{4}{9}m_b^2+\frac{4}{9}m_a^2=c^2;\quad \frac{4}{9}m_b^2+\frac{1}{9}m_a^2=\frac{a^2}{4}.$$

Почленно додавши їх: $m_a^2+m_b^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+c^2$, а додавши першу і третю рівності отримаємо: $\frac{5}{9}m_a^2+\frac{5}{9}m_b^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$;

або $m_a^2+m_b^2=\frac{9}{5}\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)$. Звідси $a^2+b^2=5c^2$.

11. $\frac{3}{7}=0,(428571)$. Період має довжину 6 цифр, а їх сума

дорівнює 4+2+8+5+7+1=27. З того, що 2008=6·334+4, маємо S_{2008}=27·334+19=9037.

12. Відповідь: 15. $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{959}+\sqrt{961}}=$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+...+\frac{\sqrt{961}-\sqrt{959}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+...+\sqrt{961}-\sqrt{959}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{961}-1}{2}=\frac{31-1}{2}=\frac{30}{2}=15.$$

13. Вказівка. Маємо рівність $ab+2a-b=n.$ Оскільки a і b – різні дільники числа n, то b ділиться на a і $2a$ ділиться на b. Звідси випливає, що $b=2a$ і $2n=4a^2=(2a^2)$.

14. Вказівка. Слід побудувати графік функції $y=\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$ при $x>0$.

15. Відповідь: 24. Вказівка $\frac{n^4-22n^2-46}{n+5}=$

$=n^3-5n^2+3n-15+\frac{29}{n+5}$. Оскільки 29 є простим і n – натуральне число, то $n=24$.

16. Відповідь: 5. Оскільки $A=\frac{185^3-158^3}{185^2-158^2}$, $B=\frac{185^3+158^3}{185^2-158^2}$,

то $p=\frac{A+B}{2}=\frac{185^3}{185^2-158^2}=\frac{185^3}{21^3}$. Тоді $\frac{37}{21}x=\frac{185}{21}$, $x=5$.

17. Відповідь: 1984. Очевидно, що якщо B-21 ділиться без остачі на 10, тоді число В закінчується цифрою 1, але тоді решта тверджень є хибним, оскільки точні квадрати не можуть закінчуватися цифрами 2 і 3. Таким чином, хибним твердженням може бути тільки друге твердження. Для деяких натуральних тіл матимемо: $B+41=n^2$, B-$48=m^2$.

Звідси випливає, що $(n-m)(n+m)=89$. Число 89 є простим, а тому $n=45$, $m=44$. Залишається переконатись, що число $B=1984$ задовольняє умову задачі.

18. Вказівка: Побудова ґрунтується на тому, що

$$5^\circ = \frac{1}{2}10^\circ = \frac{1}{2}(360-10\cdot 35^\circ).$$

19. Відповідь: $m=2$, $n=2002$; $m=2004$, $n=0$. Вказівка. Запишемо вихідне рівняння у вигляді $(m-1)(n+1)=2003$ і врахуємо, що 2003 є простим.

20. Маємо: $2(a+b)(c+d)(ac+bd-2008)=(a+b)(c+d)((b+d)^2-(a-c)^2)=(a+b)(c+d)(b+d-a+c)(b+d+a-c)= =((a+b)(c+d)+b^2-a^2)((a+b)(c+d)+d^2-c^2) = ((a+b)(c+d)- \quad -2008)^2$.

21. При $x>0$ маємо $|y|=x-1$, при $x<0$ $|y|=1-x$ і використати симетрію відносно осі OX.

22. $79^{26}<81^{26}=(3^4)^{26}=3^{104}<3^{105}=(3^5)^{21}=243^{21}<244^{21}$.

23. Підставимо $y=3$, $z=5$, $t=7$. Дістанемо квадратне рівняння відносно x, що має коренем $x=1$. Із теореми Вієта випливає, що рівняння має також корінь $x=3^2+5^2+7^2+21=104$. Четвірка (104; 3; 5; 7) задовольняє умову задачі.

24. Відповідь: $x=y=0$; $x=y=\frac{1}{2}$. Вказівка. $y \ge x^2+xy$, тоді

$y^2+x^2+xy+\sqrt{y-x^2-xy} \le y^2+y+\sqrt{y-x^2-xy} \le 3xy$, або

$y^2-2xy+x^2+\sqrt{y-x^2-xy} \le 0$, $\quad (y-x)^2+\sqrt{y-x^2-xy} \le 0$.

Звідси $x=y$ і $y-x^2-xy=0$ і знаходимо розв'язки.

25. Вказівка. Нехай відстань між пунктами S, тоді

$$v_{cp} = \frac{2S}{\frac{S}{50}+\frac{S}{30}} = \frac{2\cdot 50\cdot 30}{50+30} = \frac{100\cdot 30}{80} = \frac{300}{8} = 37{,}5 \left(\frac{км}{год}\right).$$

26. З того, що $x^2+y^2 \ge 2xy$ слідує

$$a^4+a^2b^2+b^4=\frac{3}{4}\left(a^4+b^4\right)+a^2b^2+\frac{1}{4}\left(a^4+b^4\right)\geq$$

$$\geq\frac{3}{4}\left(a^4+b^4\right)+a^2b^2+\frac{1}{4}\cdot 2a^2b^2=\frac{3}{4}\left(a^4+a^2b^2\right)+\frac{3}{4}\left(b^4+a^2b^2\right)\geq$$

$$\geq\frac{3}{4}\cdot 2a^2ab+\frac{3}{4}\cdot 2b^2ab=\frac{3}{2}\left(a^3b+ab^3\right).$$

27.

$$\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}=\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{\left(\sqrt{19}-4\right)^2}}}=$$

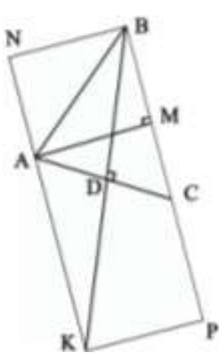
$$=\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\left(\sqrt{19}-4\right)}}=\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{35-8\sqrt{19}}}=\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{19}+4}=2.$$

28. Нехай у містечку x чоловіків і y жінок, тоді всього одружених $\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y$ і $\frac{2}{3}x=\frac{3}{5}y$, звідси $10x=9y$, тобто $x=9n$, а $y=10n$ і все населення $19n$, а одружених $\frac{2}{3}\cdot 9n+\frac{3}{5}\cdot 10n=12n$. Отже, доля одружених $\frac{12n}{19n}=\frac{12}{19}$.

29. Вказівка. Спільне кратне 6 і 10 є число 30 .Отже, на 30 банок суміші треба 5 банок яблучного соку (6·5=30) і 3 банки виноградного (3·10=30). Разом 5+3=8 банок. Після зміни рецептури потрібно 6 бідонів яблучного, бо 30:5=6, тоді 2 бідони виноградного (8-6=2). Отже одного бідона виноградного соку вистачить на 30:2=15 банок суміші. Відповідь: 15.

30. Нехай в класі x хлопців і y дівчат, $31\leq x+y\leq 36$. Тоді $3x=4y$. Звідси $x=20$ і $y=15$.

31.



Нехай $BD=h_1$, $AM=h_2$ – нерівності висоти рівнобедреного трикутника.

Аналіз: Побудуємо ΔNBK $(\angle N=90°)$ $BN=AM$, $BK=2h_1$. Розглянемо прямокутник $NBPK$. Побудуємо $\angle KBA=\angle KBP$. Проведемо $AD\perp BK$, ΔABC – шуканий.

32. Вказівка: Від супротивного.

33. (0;0) (2;2). Вказівка. І спосіб: $xy-x-y+1=1;$
$x(y-1)-(y-1)=1;\ (y-1)(x-1)=1.$
ІІ спосіб: Внаслідок симетричності $x=y$, то $x^2-2x=0.$

34. Відповідь: 7 кг. Розв'язання: Нехай біомаса (суха) без води x кг, що становить 28%. Маємо:
20 кг – 100%
x кг – 28%, тоді x=5,6.
В сушених фруктах біомаса становить 80%, тобто 5,6 кг – 80%
y кг – 100%. Звідси сушені фрукти $y=5{,}6\cdot 100:80=7$ *кг.*

35. Відповідь: 45. Вказівка: З кожної з 10 точок можна провести 9 відрізків, і, врахувавши, що це робимо двічі, то отримаємо $\dfrac{10\cdot 9}{2}=45$.

36. Відповідь: 7. Розв'язання. Одноцифрові числа займають 9 місць, 90 двоцифрових чисел – 180 місць. Залишається 2008-189=1819 місць. 3·606=1818 місць займуть 606 трицифрових чисел. Останнім з яких буде число 606+99=705. Отже, на 2008 місці число 7.

37. Відповідь: 0; ±2; ±4; ±6; ±8; ±10.

38. Відповідь: $\sqrt{2}-1$. Розв'язання:
$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+2+\sqrt{2}\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$$

39. Відповідь: -3. Розв'язання
$$\frac{2a-b}{3a-b}+\frac{5b-a}{3a+b}=\frac{(2a-b)(3a+b)+(5b-a)(3a-b)}{9a^2-b^2}=$$

$$=\frac{6a^2-ab-b^2+16ab-3a^2-5b^2}{9a^2-b^2}=\frac{3a^2-6b^2+15ab}{9a^2-b^2}=$$

$$=\frac{3\left(a^2-2b^2+5ab\right)}{9a^2-b^2}=\frac{3\left(a^2-2b^2+3b^2-10a^2\right)}{9a^2-b^2}=\frac{3\left(b^2-9a^2\right)}{9a^2-b^2}=-3,$$

(оскільки з умови *5ав=3в*^{2}*-10а*^{2}).

40. Доведення:

$$\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}}=\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}+\underbrace{11\ldots1}_{n}-2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}}=$$

$$=\sqrt{\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00...0}_{n}-\underbrace{11...1}_{n}}=\sqrt{\underbrace{11...1}_{n}\cdot1\underbrace{00...0}_{n}-\underbrace{11...1}_{n}}=\sqrt{\underbrace{11...1}_{n}(1\underbrace{00...0}_{n}-1)}=$$

$$=\sqrt{\underbrace{11...1}_{n}\cdot\underbrace{99...9}_{n}}=\sqrt{\underbrace{11...1}_{n}\cdot9\cdot\underbrace{11...1}_{n}}=3\cdot\underbrace{11...1}_{n}=\underbrace{33...3}_{n},$$

що й треба було довести.

41. Доведення. Оскільки даний квадрат покривається 25 квадратами із стороною 20 см і в кожний з них попаде щонайменше 2 точки (25·2=50), то принаймні в один з квадратів, за принципом Діріхле, попаде 3 точки, тобто 3 точки можна покрити квадратом із стороною 20 см.

42. Доведення: Оскільки $a^2+b^2+c^2+3-2(a+b+c)=a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2>1$, то нерівність доведена.

43. Оскільки $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$, то маємо $\frac{x+y}{2}=\frac{2005}{2}\geq\sqrt{xy}$.

Звідси $xy\leq\left(\frac{2005}{2}\right)^2$ тобто найбільше значення $\left(\frac{2005}{2}\right)^2$ і цей добуток максимальний, якщо $x=y=\frac{2005}{2}$.

44. Позначимо кількість його ребер через N, кількість чотирикутних граней – через K, шестикутних – через M. Тоді маємо: 2007·3+4K+6M, що неможливо, тобто такого многогранника не існує.

45. Запишемо рівняння у вигляді *(x-2)(x+y)=7,* тоді можливі випадки:

1. $\begin{cases} x-2y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x-2y=1 \\ x+y=7 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x-2y=-7 \\ x+y=-1 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x+y=-7 \end{cases}$. Розв'язавши ці системи отримаємо

розв'язки: (3;-2), (5;2), (-3;2), (-5;-2).

46. Сформулюємо задачу так: знайти остачу від ділення на 100 числа 2008. Остачі такі: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 4, … Починаючи з другої остачі 4 для $n=22$, остачі повторюються з періодом 20. Оскільки 2008 при діленні на 20 дає остачу 8, то останні дві цифри числа 2^{2008} такі ж, як дві останні цифри числа 2^8, тобто 5 і 6.

47. Позначимо 2006 через n, тоді
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=$
$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2$, що й треба було довести.

48. Вказівка: $n^4+4=(n^4+4n^2+4)-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2-2n)(n^2+2+2n)$.

49. Відповідь: а) $(x^2+x+1)(x^6-x^4+x^3-x+1)$;
б) $(x^2+x+1)(x^6-x^5+x^3-x^2+1)$.
Вказівка: $x^8+x^7+1=x^8+x^7+x^6-x^6-x^5-x^4+x^5+x^4+x^3-x^3-x^2-x+x^2+x+1=x^6(x^2+x+1)-x^4(x^2+x+1)+x^3(x^2+x+1)-x(x^2+x+1)+x^2+x+1=(x^2+x+1)(x^6-x^4+x^3-x+1)$.

50. Дійсно. $x^{95}+x^{94}+\ldots+1=(1+x+\ldots+x^{31})+x^{32}(1+x+\ldots+x^{31})+$
$+x^{64}(1+x+\ldots+x^{31})=(1+x+\ldots+x^{31})(1+x^{32}+x^{64})$.

ЛІТЕРАТУРА

1. И.Л. Бобинская. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.
2. В.О. Борисов, В.М. Лейфура та ін. Змагання юних математиків України. – Х.: Основа, 2005.
3. А.Б. Волковська, О.В. Гримайло. Готуємось до олімпіади з математики. – Х.: Основа, 2007.
4. Р.П. Ушаков. Знаходження скінчених сум. – Х.: Основа, 2006.
5. В.А. Ясинський. Задачи математических олимпиад. – Терн.: Навчальна книга, 2005.

ЗМІСТ